ETHIOPIAN INTERNATIONAL JOURNAL OF MULTIDISCIPLINARY RESEARCH

eISSN: 2349-5715 pISSN: 2349-5707

Volume: 11, Issue 12, December-2024 SJIF 2019: 4.702 2020: 4.737 2021: 5.071 2022: 4.919 2023: 6.980 2024: 7,662

Буров Вячеслав Сергеевич

"Университет экономики и сервиса Термеза"Направление: Математика

I-курс магистратуры

E-mail: *vburov806@gmail.com*

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Аннотация:Задача Дирихле для уравнения Лапласа представляет собой задачу нахождения гармонической функции, которая удовлетворяет уравнению Лапласа в определённой области, при этом на границе этой области заданы значения функции. Уравнение Лапласа является частным случаем уравнения Пуассона, где источники отсутствуют, и оно описывает состояние равновесия в различных физических процессах, например, в электрическом поле или температурном распределении в стационарном состоянии.

Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа заключается в нахождении функции, которая не только удовлетворяет самому уравнению в теле области, но и подчиняется заданным граничным условиям. Метод решения обычно включает использование теории потенциала, разложение в ряды Фурье, а также методы функционального анализа и вариационные принципы. Важным аспектом является наличие уникальности решения, которое обеспечивается теоремой о единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа при соблюдении достаточно общих условий на границе области.

Таким образом, задача Дирихле для уравнения Лапласа служит фундаментальной моделью для решения реальных задач в физике, инженерии и математике, связанных с равновесными состояниями в различных средах.

Ключевые слова: Задача Дирихле, Уравнение Лапласа, Методы решения, Функциональный анализ,Частные производные, Дифференциальные уравнения

Задача Дирихле для уравнения Лапласа предсатвляет собой одну из ключевых задач в теории уравнений в частных производных. В общем виде задача состоит в нахождении функции, которая удовлетворяет уравнению Лапласа в заданной области, с определенными значениями на ее границе.

1. Уравнение Лапласа

Уравнение Лапласа в общем виде имеет вид

$$\Delta \mathrm{u} - 0$$

Где $\Delta = \nabla^2$- оператор Лапласа, который в двухмерном случае записывается как:

$$\Delta \mathrm{u} - \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}^2}$$

eISSN: 2349-5715 pISSN: 2349-5707

Volume: 11, Issue 12, December-2024 SJIF 2019: 4.702 2020: 4.737 2021: 5.071 2022: 4.919 2023: 6.980 2024: 7,662

А втрехмерном:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Решение уравнения Лапласа называются гармоническими функциями, и они имеют множество приложений,включая электростатику, теоририю теплопроводности и механику сплошных сред.

2. Поставновка задачи Дирихле

Задача Дирихле заключается в нахождении решения уравнения Лапласа с заданными значениями функции на границе области. Формально задачу можно представить в следующим образом:

1. Пусть Ω – некоторая область в $\mathbb{R}^n$

2. $\partial\Omega$- граница области Ω

3. На границе области функии $u(x)$ принимает заранее заданные значения $f(x)$

Задача Дирихле ставится следующим образом: найти такую функцию u, которая удовлетворяет уравнению Лапласа в области Ω и на границе области выполняется условие

$$u(x) = f(x), \text{для всех } x \in \partial\Omega$$

Функция $f(x)$ задает значение $u(x)$ на границе области $\partial\Omega$, а сама функция $u(x)$ опрделяется внутри области Ω

3. Существование и единственность решения

Для задачи Дирихле существует теорема о существовании и единственности решения, которая утверждает, что при заданных непрерывных граничных условиях существует единственное решение, которое удовлетворяет уравнению Лапласа в области Ω. Это решение можно получить как предел последовательности решений для приближенных задач.

Решение задачи Дирихле существует и уникально при условии, что функции $f(x)$, заданная на границе области, является непрерывной. Если $f(x)$ является более гладкой (например, дифференцируемой), то решение задачи будет иметь более высокие регулярности.

4. Методы решений задачи

Существует несколько подходов для нахождения решения задачи Дирихле зависимости от формы области и граничных условий. Рассмотрим несколько из них

4.1 Метод разделения переменных

Этот метод применяется, когда область Ω обладает симметрией, например, если она является прямоугольником, кругом или цилиндром. В таких случаях можно попытаться представить решение задачи в виде произведения функция от каждой из переменных. Например, для области прямоугольника можно записать решение в виде:

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

ETHIOPIAN INTERNATIONAL JOURNAL OF MULTIDISCIPLINARY RESEARCH

eISSN: 2349-5715 pISSN: 2349-5707

Volume: 11, Issue 12, December-2024 SJIF 2019: 4.702 2020: 4.737 2021: 5.071 2022: 4.919 2023: 6.980 2024: 7,662

Где $X(x)$ и $Y(y)$ - функции, зависящие только от соответствующих переменных. Подставив это выражение в уравнение Лапласа, мы получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения для функции $X(x)$ и $Y(y)$

Этот метод широко используется для областей с прямолинейными границами, таких как прямоугольники, круги и цилиндры.

4.2 Метод потенциала

Метод потенциала используется для решения задачи Дирихле в более сложных областях, где не удается применить метод разделения переменных. В этом методе решение представляется через интегралы, в которых используются функции Грина. Функция Грима $G(x,y)$ для области Ω - это решение уравнения Лапласа с точечным источником на внутренней точке области, которое удовлетворяет нулевому граничному по границе области:

$$u(x) - \int G(x,\xi)f(\xi)d\sigma(\xi)$$

Где ξ- точка на границе области, $d\sigma(\xi)$- элемент площади на границе, а $f(\xi)$- функция, заданная на границе.

4.3 Численные методы

Когда аналитическое решение задачи Дирихле невозможно из-за сложности области или граничных условий, прибегают к численным методам, таким как метод конечных разностей или метод конечных элементов.

Метод конечных разностей основывается на аппроксимации производных конечными разностями и решении системы линейных уравнений, которая аппроксимирует уравнение Лапласа.

Метод конечных элементов предполагает разбиение области на маленькие элементы и решение задачи для каждого элемента, после чего собираются для всей области.

Эти методы позволяют получить численное приближенное решение для более сложных геометрий и граничных условий.

5. Примеры решения

5.1 Круглая область

Рассмотрим задачу Дирихле для области в виде круга радиуса R с граничным условием $u(\theta) = f(\theta)$, где θ- угловая координата. Решение для этой задачи можно найти разложение в ряд Фурье. Решение будет представлять собой сумму синусов и косинусов, которые удовлетворяют уравнению Лапласа.

5.2 Прямоугольная область

Для прямоугольной области с граничными условиями

$$u(x,0) - f_1(x), u(x,L) - f_2(x),\ u(0,y) = g_1(y), u(L,y) = g_2(y)$$

eISSN: 2349-5715 pISSN: 2349-5707

Volume: 11, Issue 12, December-2024 SJIF 2019: 4.702 2020: 4.737 2021: 5.071 2022: 4.919 2023: 6.980 2024: 7,662

Можно использовать метод разделения переменных. Решение будет выражаться через произведение функций от x и y, которые должны удовлетворять соответствующим граничным условиям.

Пример 1: Задача Дирихле для круга

Условие задачи:

Рассмотрим область Ω которая является кругом радиуса R в плоскости, т.е $\Omega = \{(x,y) \epsilon R^2 | x^2 + y^2 < R^2\}$

Задано граничное условие на окружности:

$$u(x,y) = f(\theta), \text{для } x = R\cos\theta, y = R\sin\theta, \quad \theta \in [0,2\pi]$$

Задача- найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в области Ω с этим граничным условием.

Решение:

Поскольку область круглая можно использовать полярное координаты (r,θ), где r- радиус, а θ-угловая координата. Уравнение Лапласа в полярных координатах принимает вид:

$$\Delta u - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - 0$$

Предположим, что решение можно представить в виде разложения по ряду Фурье:

$$u(r,\theta) - \sum_{n\to-\infty}^{\infty} A_n r^n e^{in\theta}$$

Подставив это выражение в уравнение Лапласа, получаем, что коэффициенты A_n могут быть найдены, исходя из граничного условия на $r = R$

$$u(R,\theta) = f(\theta) = \sum_{n\to-\infty}^{\infty} A_n R^n e^{in\theta}$$

Граничное условие $u(R,\theta) = f(\theta)$ дает нам разложение функции $f(\theta)$ в ряд Фурье, и коэффициенты A_n равны коэффициентам этого разложения:

$$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-in\theta} d\,\theta$$

Таким образом, решение задачи Дирихле для круга будем иметь вид:

$$u(r,\theta) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{R}\right)^n e^{in\theta}$$

Пример 2: Задача Дирихле для прямоугольной области

Условие задачи:

eISSN: 2349-5715 pISSN: 2349-5707

Volume: 11, Issue 12, December-2024 SJIF 2019: 4.702 2020: 4.737 2021: 5.071 2022: 4.919 2023: 6.980 2024: 7,662

Рассмотрим область $\Omega - [0, L] \times [0, H]$ – прямоугольник. Заданы следующие граничные условия:

$$u(x, 0) = f_1(x), \quad u(x, H) = f_2(x)$$

$$u(y, 0) = g_1(y), \quad u(L, y) = g_2(y)$$

Где $f_1(x), f_2(x), g_1(y), g_2(y)$- заданные функции. Необходимо найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в области Ω

Решение:

Предположим, что решение задачи имеет вид произведения функций от переменных x и y

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

Подставим это уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad X^n(x)Y(y) + X(x)Y^n(y) = 0$$

Разделим переменные:

$$\frac{X^n(x)}{X(x)} = - \frac{Y^n(y)}{Y(y)} = \lambda$$

Таким образом, получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$X^n(x) + \lambda X(x) = 0 \quad Y^n(y) - \lambda Y(y) = 0$$

Решения этих уравнений зависят от знака λ. Рассмотрим случай, когда $\lambda = (\frac{n\pi}{L})^2$ для некоторых целы n. Тогда решения будет иметь вид:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad Y_n(y) = A_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{H}\right) + B_n \cosh\left(\frac{n\pi y}{H}\right)$$

Граничные условия на $y = 0$ и $y = H$ дают систему линейных уравнений для коэффициентов A_n и B_n

После их решения, полное решение будет представлено как сумма этих функций:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sinh(\frac{n\pi y}{H}) + B_n \cosh(\frac{n\pi y}{H})) \sin(\frac{n\pi x}{L})$$

Коэффициенты A_n и B_n находятся из граничных условий на $x = 0$ и $x = L$

Пример 3: Задача Дирихле для полуобласти

Условие задачи:

eISSN: 2349-5715 pISSN: 2349-5707
Volume: 11, Issue 12, December-2024 SJIF 2019: 4.702 2020: 4.737 2021: 5.071 2022: 4.919 2023: 6.980 2024: 7,662

Рассмотрим область $\Omega - \{(x,y)|x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}$, т.е четверть круга радиуса R. На границе области заданы следующие граничные условия:

$$u(x,0) = f_1(x), \quad u(0,y) = f_2(y), \quad u(R,\theta) = f_3(\theta), \ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Задача- найти решение уравнения Лапласа в этой области.

Решение:

Для решения этой задачи можно использовать разложение в ряд Фурье по углу θ, аналогично тому, как это делалось для круга. Однако из-за ограничения области (полуобласть) и специфических граничных условий решение будет представлять собой частичный ряд Фурье, учитывающий только те гармоники, которые соответствуют условиям на $x = 0$ и $y = 0$

Подход к решению будет включать использование метода разделения переменных в полярных координатах и получение решения через ряд Фурье для угловых компонент.

Заключение

Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа представляет собой важный шаг в изучении математической физики, поскольку оно позволяет находить решение уравнения для потенциала или поля, удовлетворяющего заданным граничным условиям. В процессе решения задачи было рассмотрено использование различных методов, таких как разложение в ряд Фурье, метод интегрирования по частям и применение принципа суперпозиции. Все эти методы позволяют найти решения, которые можно интерпретировать как физические поля, удовлетворяющие условиям на границе области.

В результате анализа задачи Дирихле для уравнения Лапласа мы получаем решение, которое удовлетворяет как уравнению Лапласа, так и заданным граничным условиям. Важно отметить, что решение задачи существует и единственно при определенных условиях, таких как регулярность области и корректность граничных условий.

Таким образом, задача Дирихле для уравнения Лапласа имеет широкое применение в различных областях, таких как электрическое и гравитационное поля, а также в теории теплопроводности, где важно определить распределение физических величин в области с заданными граничными условиями.