MODELING GEOPHYSICAL SIGNALS USING THE HIGHER ORDER SPLINE METHOD

Qobilov S.SH.,

Teacher of the Department of "Artificial Intelligence" at the Tashkent

University of Information Technologies named after Muhammad Al-Khwarizmi

qobilov.sirojiddin92@gmail.com

Tillaboev A.A.,

Teacher of the Department of "Artificial Intelligence" at the Tashkent

University of Information Technologies named after Muhammad Al-Khwarizmi

Foraliexpress101@gmail

Muminov E.N.

Teacher of the Department of "Artificial Intelligence" at the Tashkent

University of Information Technologies named after Muhammad Al-Khwarizmi

emuminov864@gmail.com

Abstract: The article considers the problem of digital reconstruction of one-dimensional geophysical signals using high-order interpolation spline functions. This approach allows to reconstruct signals with high accuracy and effectively solve practical problems in geophysics. As an example, experimental data are used, on the basis of which a seventh-order spline model of a geophysical signal is constructed.

Keywords: interpolation, high-order spline function, geophysical signal, electromagnetic field.Введение:

Современные геофизические исследования направлены на анализ параметров подземных структур по измеренным сигналам. Часто невозможно получить данные по всей территории из-за временных и финансовых ограничений. Поэтому интерполяционные методы, в частности, сплайны, позволяют на основе частичных измерений моделировать поведение сигнала на всей области. Это особенно важно для анализа аномалий в электромагнитных и гравитационных полях, сейсмических и акустических колебаниях.

Среди множества методов восстановления сигналов сплайновые модели выделяются высокой точностью и физической интерпретируемостью. Они широко применяются для построения математических моделей и прогнозирования размещения полезных ископаемых, что делает их актуальными в геофизике.

Основная часть

На сегодняшний день использование интерполяционных сплайн-функций высокого степени для построения математической модели при цифровой обработке и восстановлении геофизических сигналов актуально при решении практических задач. Ниже мы подробно обсудим процесс построения интерполяционной сплайн-функции высшего степени.

Пусть $p>0$ – фиксированное целое, $q \quad p$, $f(x) \quad C^q(- \quad , \quad)$ и $f(x_i)=f(ih)$, $(i=0,\pm1,\pm2,...)$ – след функции на одномерной равномерной сетке Δ.

В [2] описан оператор L, переводящий $f(ih)$ в функцию $S_{ph}(x)$, определенную всюду и являющуюся интерполяционным сплайном степени $2p+1$ дефекта $p+1$. Из доказанной в [2] (см. также [1] с. 304 - 307) теоремы в одномерном случае относительно погрешности $f(x)-S_{ph}(x)$ и ее производных степени $r<q$ следует оценка

$$|f^{(r)}(x)-S^{(r)}_{ph}(x)| \quad h^{q-r}K(p)\sup_x |f^{(q)}(x)|, \qquad (1)$$

где константа $K(p)$ зависит только от p.

Для любого p сплайн $S_{ph}(x)$ можно записать в явном виде через значения функции $f(ih)$, поэтому он удобен для приложений . В отличие от эрмитовых сплайнов, этими сплайнами можно приблизить и функции из класса $C[a,b]$.

Для дальнейшего введем следующие обозначения:

$\omega(f,h)$ – модуль непрерывности; Δ – равномерная сетка $x_i=a+ih$ с шагом $h=\frac{b-a}{N}$;

$g_k(t)$ – полином некоторой степени;

$g_k^{(l)}=\max\limits_{t_{1,k} \; t \; t_{2,k}} |g_k^{(l)}(t)|$, где $k=1,2,...,20$; $t_{1,k},t_{2,k} \quad [0,1]$.

В следующих работах уточнение оценки погрешностей этих сплайнов в различных классах функций распространены в трех направлениях:

на классах $W^r[a,b]$; на классе $C^r[a,b]$ величины $\sup\limits_x |f^{(r)}(x)|$ заменены на модуль непрерывности $\omega(f^{(r)},h)$;

во всех случаях указано численное значение $K(p)$.

В [3], используя методику разработанную в , в случаях $p=1$ и $p=2$, т.е. для сплайнов 3-ей и 5-ой степеней получена оценки погрешностей в различных классах функций. В [1] при $x_i \quad x \quad x_{i+1}$ для функции $S_{ph}(x)$ указано следующее выражение

$$S_{ph}(x)=\sum_{j=0}^{p}\sum_{k=0}^{p-j}\frac{(p+k)!}{k!\,j!\,p!}[a_{pj}(x_i)t^{j+k}(1-t)^{p+1}+(-1)^j a_{pj}(x_{i+1})t^{p+1}(1-t)^{j+k}] \qquad (2)$$

где $t=h^{-1}(x-x_i)$, $a_{p0}(x_i)=f(x_i)$,

$$a_{pj}(x_i)=j!\sum_{k=j}^{p}\frac{\Delta^k f(x_i)}{k!}s(k,j), \quad j \quad 1. \qquad (3)$$

$s(k,j)$ – числа Стирлинга первого рода [1].

Если рассматриваемая функция является достаточно гладкой, то ее желательно аппроксимировать сплайнами более высокой степени, чтобы сходимость была более быстрой. С этой целью исследуем погрешности приближения функции сплайнами Рябенького 7-ой степени. Здесь мы продолжим исследования, проведенные в [3].

Известно, что числа Стирлинга первого рода определяются следующими рекуррентными соотношениями:

$$s(0,0)=0, \quad s(k,k)=1, \quad k \quad 1,$$

$$s(k+1,j)=s(k,j-1)-k \quad s(k,j), \quad (j=\overline{1,k}).$$

Отсюда находим необходимые нам числа Стирлинга:

$$s(0,0)=0; \quad s(1,1)=1; \quad s(2,1)=-1; \quad s(3,1)=2;$$

$$s(2,2)=1; \quad s(3,2)=-3; \quad s(3,3)=1.$$

Теперь из (3) находим

$$a_{30}(\xi_i)=f(\xi_i),\ a_{31}(\xi_i)=\frac{1}{6}[-11f(\xi_i)+18f(\xi_{i+1})-9f(\xi_{i+2})+2f(\xi_{i+3})],$$

$$a_{32}(\xi_i)=2f(\xi_i)-5f(\xi_{i+1})+4f(\xi_{i+2})-f(\xi_{i+3}),$$

$$a_{33}(\xi_i)=-f(\xi_i)+3f(\xi_{i+1})-3f(\xi_{i+2})+f(\xi_{i+3}),$$

где $\xi_i = x_i$ или $\xi_i = x_{i+1}$.

Подставляя эти выражения в (2), после не сложных, но громоздких преобразований, на отрезке $x_i \quad x \quad x_{i+1}$ для сплайна Рябенького седьмой степени $S_7(x) = S_{3h}(x)$ получим следующее выражение:

$$S_{(7)i}(x) = \sum_{j=1}^{4} \varphi_j(t) f(x_{i+j-1}) \qquad (4)$$

где

$$\varphi_1(t) = 1 - \frac{11}{6}t + t^2 - \frac{1}{6}t^3 - \frac{23}{3}t^4 + \frac{41}{2}t^5 - \frac{55}{3}t^6 + \frac{11}{2}t^7,$$

$$\varphi_2(t) = 3t - \frac{5}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^3 + \frac{92}{3}t^4 - 82t^5 + \frac{220}{3}t^6 - 22t^7,$$

$$\varphi_3(t) = -\frac{3}{2}t + 2t^2 - \frac{1}{2}t^3 - 46t^4 + 123t^5 - 110t^6 + 33t^7,$$

$$\varphi_4(t) = \frac{1}{3}t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{92}{3}t^4 - 82t^5 + \frac{220}{3}t^6 - 22t^7,$$

$$\varphi_5(t) = -\frac{23}{3}t^4 + \frac{41}{2}t^5 - \frac{55}{3}t^6 + \frac{11}{2}t^7.$$

На сегодняшний день восстановление геофизических сигналов и их моделирование являются важными вопросами. На основе разработанной нами выше модели были разработаны блок-схема и программа восстановления геофизических сигналов, выполнения цифровой обработки. На Рисунок 1 показана блок-схема этой программы.

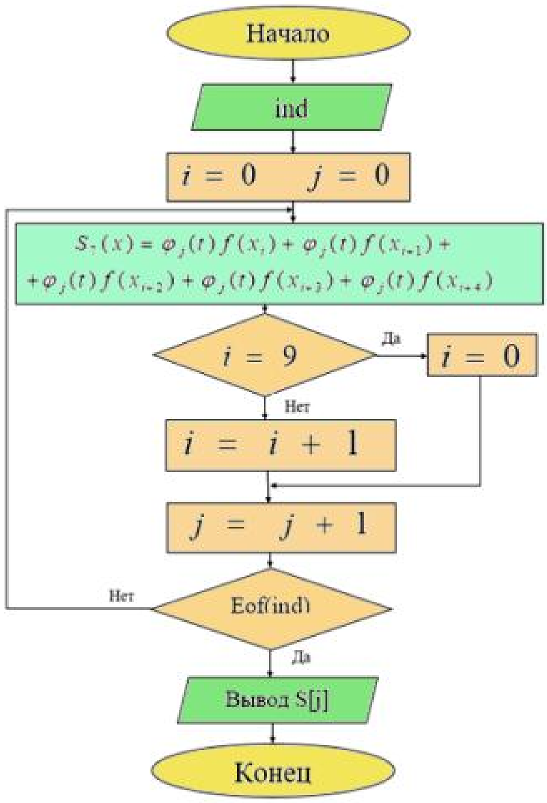

Рисунок 1: Блок-схема программы обработки одномерных геофизических сигналов с использованием интерполяционных сплайн-функций высокого степени.

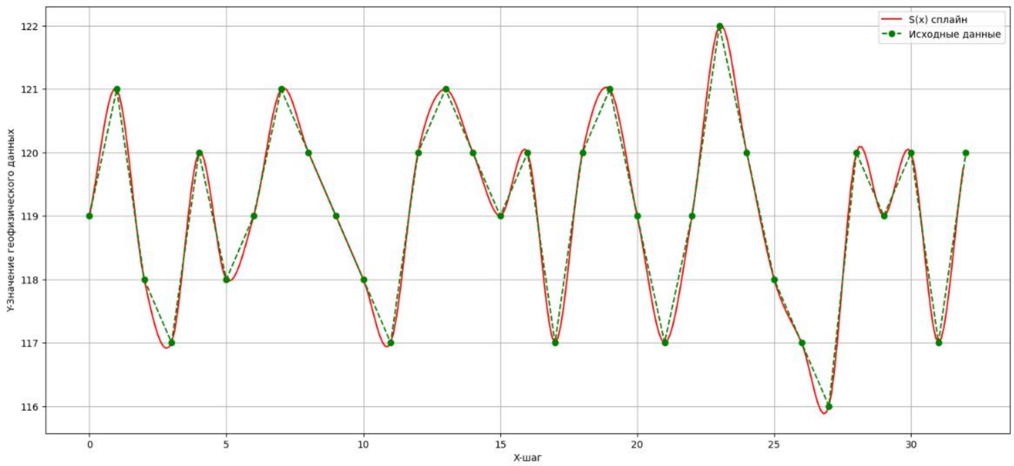

Рис. 2. Графическое представление результата восстановления геофизического сигнала.

Используя предложенную в этой статье модель, геофизические сигналы с одной переменной реконструируются, обрабатываются и программируются в цифровом виде. Изображения выше являются графическим представлением вывода программы[4].

Заключение

В данной работе рассматривается актуальная задача восстановления геофизических сигналов с применением интерполяции на основе сплайн-функций высокого порядка. Предложенная модель использует такие функции для точного воссоздания структуры сигнала при цифровой обработке. В качестве информативных признаков анализируются аномальные колебания электромагнитного и гравитационного полей, изменения ионосферы, сейсмический шум и акустические волны. Результаты показали, что сплайн-функции высокого порядка обеспечивают высокую точность интерполяции (см. рис. 2), а сама методика демонстрирует эффективность при обработке сложных геофизических данных.

References

1. 1. Sobolev S.L. Introduction to the Theory of Cubature Formulas. - Moscow: Nauka. 1974. 808 p.
2.
3. 2. Ryabenkiy V.S., Filippov A.F. On the Stability of Difference Equations. - Moscow: Gostekhizdat. 1956, - 171 p.
4.
5. 3. Israilov M.I., Eshdavlatov B. Refinement of the Residual Term of an Interpolation Spline. // Problems of Computational and Applied Mathematics, - Tashkent: RISO AN Uzbekistan, 1986, issue 80, pp. 10-26.
6. 4. Bahramov S.A., Jovliev S. Bicubic Splines in Problems of Modeling of Multidimensional Signal. “International journal of “the korea institute of maritime information & communication sciences.” Vol.9, No.4, August 2011, pp. 420-423.
7. 5.Yusupov I, Nurmurodov J, Ibragimov S, Gofurjonov M, Qobilov S. “Calculation of Spectral Coefficients of Signals on the Basis of Haar by the Method of Machine Learning,” 14th International Conference, IHCI 2022, Tashkent, Uzbekistan, October 20–22, 2022, pp 547–558. https://link.springer.com/conference/ihci